# Расчет статически-определимой шарнирно-опертой балки

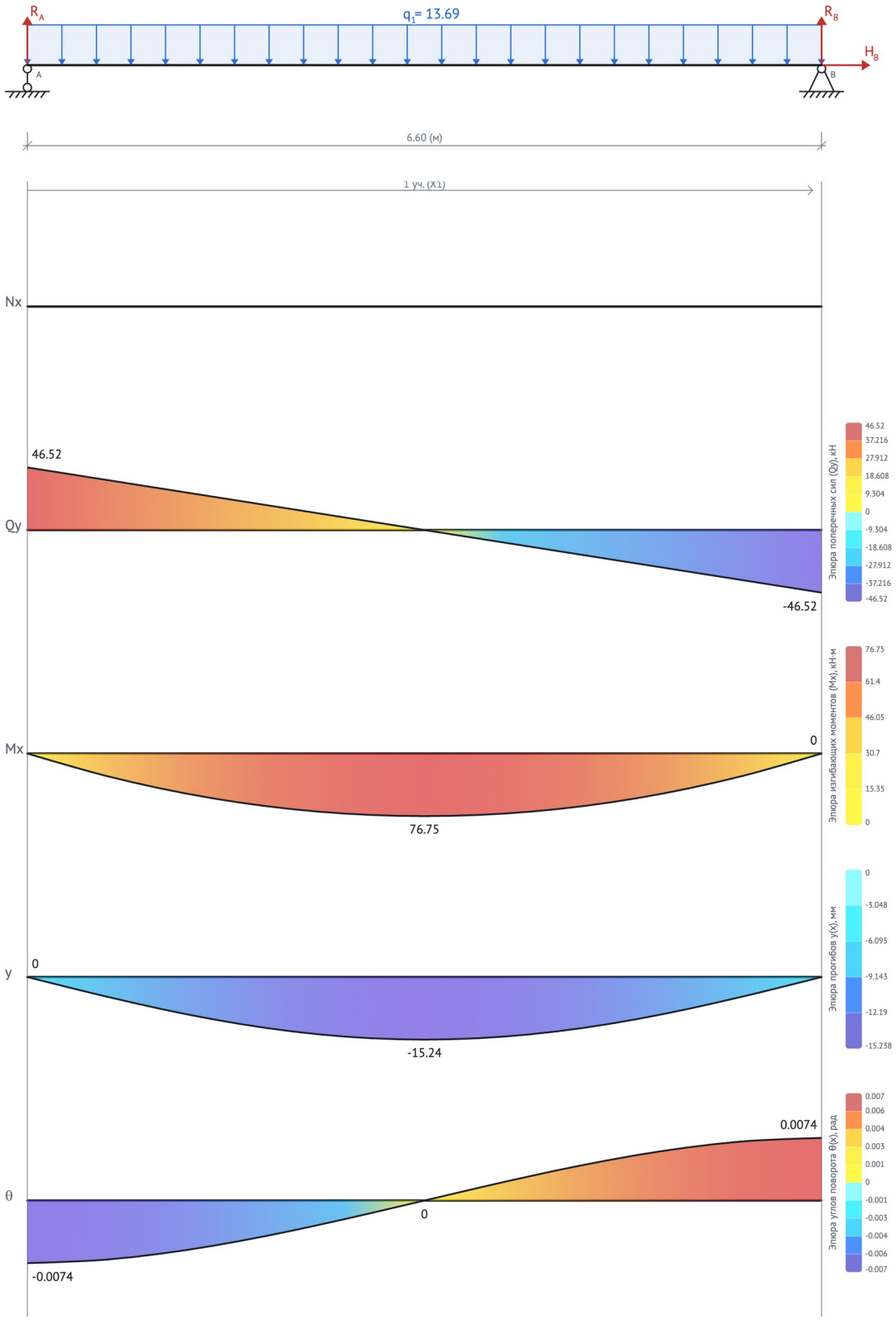


Рис.1 — Расчетная схема балки

# Общие сведения

Расчетная схема представляет собой статически определимую двухопорную шарнирно-опертую балку пролетом L = 6.6 м.

В точке A (x = 0 м) установлена подвижная (катковая) опора, воспринимающая только поперечную силу; В точке B (x = 6.6 м) установлена неподвижная шарнирная опора, воспринимающая продольную и поперечную силы.

К балке приложена равномерно распределенная нагрузка $q_1$ = 13.69 кН/м.

Расчет выполняется в следующем объеме:

— определение реакций опор из уравнений статического равновесия;

— построение эпюры поперечных сил Q(x) методом сечений;

— построение эпюры изгибающих моментов M(x) методом сечений;

— построение эпюры продольных сил N(x) методом сечений;

— определение прогибов y(x) и углов поворота θ(x) поперечных сечений методом начальных параметров;

— численная проверка результатов методом трапеций (N = 400);

— подбор оптимального поперечного сечения балки.

**Каждый раздел сопровождается подробными пошаговыми выкладками — полноценный ручной расчет с формулами и подстановками, а не только итоговые значения.**

# Результаты расчета

| Параметр | Значение | Комментарий |
|---|---|---|
| **Учет собственного веса** | | |
| qsw | 0.41 кН/м | равномерно распределенная нагрузка по всей длине балки |
| **Реакции опор** | | |
| RA | 46.52 кН | вертикальная реакция, опора A (x = 0 м) |
| RB | 46.52 кН | вертикальная реакция, опора B (x = 6.60 м) |
| **Внутренние усилия** | | |
| Qmax | 46.52 кН | при x = 0 м |
| Qmin | -46.52 кН | при x = 6.60 м |
| Mmax | 76.75 кН·м | при x = 3.30 м |
| Mmin | 0 кН·м | при x = 0; 6.60 м |
| **Перемещения** | | |
| wmax | -15.2385 мм | при x = 3.30 м |
| θmax | -0.0074 рад | при x = 0 м |
| **Подбор сечения** | | |
| Сечение | Двутавр 35Б1 | СТО АСЧМ 20-93 (Прокат стальной сортовой фасонного профиля. Двутавры горячекатаные с параллельными гранями полок. Технические условия) |

| | | |
|---|---|---|
| A | 52.68 см² | |
| Wx | 641.30 см³ | |
| Ix | 11 094 см⁴ | |
| Wy | 90.98 см³ | |
| Iy | 791.54 см⁴ | |
| По нормальным напряжениям | 119.68 МПа ≤ 245 МПа | **Выполнено** |
| По касательным напряжениям | 25.03 МПа ≤ 141 МПа | **Выполнено** |
| По 3-й теории прочности | 119.68 МПа ≤ 245 МПа | **Выполнено** |
| Результат | **Сечение подобрано** | Коэффициент использования: 0.693 |
| **Проверка прогиба** | | |
| fmax | 15,2 мм | пролет L = 6,6 м |
| [f] | 22,0 мм | L/300 · СП 16.13330.2017 (СП 20.13330.2017, табл. Д.1) |
| Использование | 69 % | Балки перекрытий (общий случай) · Полная (D+L) |
| Результат | **Выполнено** | f ≤ [f]: 15,2 ≤ 22,0 мм |

## Определение опорных реакций

Из эпюры изгибающих моментов M определяем, что $M_{max}$ = 74.542 (кН × м). Выполним перевод единиц измерения максимального изгибающего момента в с систему СИ: $M_{max}$ = 74.542 (кН × м) = 74542.05 (Н × м).

Из эпюры поперечных сил Q определяем, что $Q_{max}$ = 45.177

(кН). Выполним перевод единиц измерения максимальной поперечной силы в с систему СИ: $Q_{max}$ = 45.177 (кН) = 45177 (Н).

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

где: $M_{max}$ - наибольший изгибающий момент;

$W_x$ - момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси Ox;

Заметим, что наибольшие нормальные напряжения в поперечных сечениях балки возникают в наиболее удаленных точках от нейтральной оси Ox, которая проходит через центр тяжести сечения.

Из условия прочности по нормальным напряжениям вычислим значение минимального требуемого момента сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{74542.05(Н \times м)}{[245(МПа)]} = 304.253(см^3)$$

Дополнительно из условия жесткости (проверка прогиба) требуемый момент инерции:

$$I_x^{тр} \geq 7463.25(см^4)$$

Из сортамента выбираем ближайший больший номер сечения у которого:

$$W_x^{таб} \geq W_x$$

Из сборника СТО АСЧМ 20-93 (Прокат стальной сортовой фасонного профиля. Двутавры горячекатаные с параллельными гранями полок. Технические условия) выбираем: Двутавр 35Б1

Геометрические характеристики выбранного сечения:

Момент сопротивления относительно оси Ox: $W_x$ = 641.3 ($см^3$)

Высота сечения: h = 34.6 (см)

Ширина сечения: b = 17.4 (см)

Толщина стенки: $t_s$ = 0.6 (см)

Средняя толщина полки: $t_f = 0.9$ (см)

Статический момент полусечения относительно оси Ox: $S_x = 358.09$ ($см^3$)

Осевой момент инерции относительно оси Ox: $I_x = 11094$ ($см^4$)

1) Проверим прочность выбранного сечения (Двутавр 35Б1) по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x^{таб}} = \frac{74542.05(Н \times м)}{641.3 \times 10^{-6}(м^3)} = 116.236(МПа) \leq 245(МПа)$$

2) Определим, удовлетворяет ли принятое сечение балки (Двутавр 35Б1) условию прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \times S_x^{отс}}{b \times I_x} \leq [\tau]$$

где: $Q_{max}$ - наибольшая поперечная сила;

$S_x^{отс}$ - статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси Ox;

$b$ - ширина поперечного сечения балки на уровне рассматриваемой точки;

$I_x$ - момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси Ox;

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \times S_x}{b(y) \times I_x} = \frac{45177(Н) \times 358.09 \times 10^{-6}(м^3)}{0.6 \times 10^{-2}(м) \times 11094 \times 10^{-8}(м^4)} = 24.304(МПа) \leq 141(МПа)$$

3) По теории наибольших касательных напряжений (третья теория прочности) вычислим эквивалентные напряжения в рассматриваемых точках выбранного поперечного сечения, по формуле:

$$\sigma_i^{экв} = \sqrt{\sigma_i^2 + 4 \times \tau_i^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_i = \frac{M_{max}}{I_x} \times y_i$$

где y - расстояние от центра тяжести сечения до выбранной

точки;

Касательные напряжения в i-ой точке вычислим по формуле:

$$\tau_i = \frac{Q_{max} \times S_x^{omc}}{b(y) \times I_x}$$

где $S_x^{omc} = A^{omc} \times y_c$ - статический момент отсеченной части сечения выше выбранной точки, относительно оси X;

$y_c$ - координата центра тяжести отсеченной части сечения, относительно оси X;

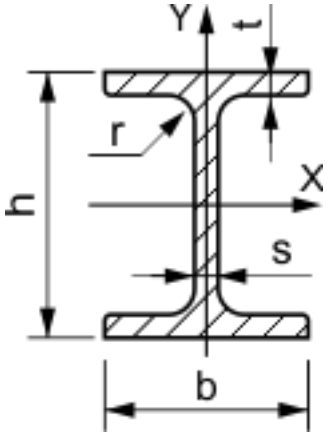
Выберем для проверки 4 точки в поперечном сечении:

1 точка - с координатой $y_1 = h/2$, статический момент $S_x(y = h/2) = 0$;

2 точка - с координатой $y_2 = h/2 - t$;

3 точка - с координатой $y_3 = h/2 - t$; Статический момент такой же как и для второй точки;

4 точка - в центре сечения, с координатой $y_4 = 0$;




Для 1 точки $y_1 = \frac{h}{2}$:

$$\sigma_1 = \frac{M_{max}}{I_x} \times \frac{h}{2} = \frac{74542.05(Н*м)}{11094 \times 10^{-8}(м^4)} \times \frac{34.6(см)}{2} = 116.2(МПа)$$

Статический момент отсеченной части $S_x = 0$ т.к. $A_{отс} = 0$

$$\tau_1 = \frac{Q_{max} \times S_x^{omc}}{b(y) \times I_x} = \frac{45177(Н) \times 0(м^3)}{0.174(м) \times 11094 \times 10^{-8}(м^4)} = 0(МПа)$$

Для 2 точки $y_2=(\frac{h}{2}-t_f)$:

$$\sigma_2=\frac{M_{max}}{I_x}\times(\frac{h}{2}-t_f)=\frac{74542.05(Н*м)}{11094\times10^{-8}(м^4)}\times(\frac{34.6(см)}{2}-0.9(см))=110.2(МПа)$$

$$y_c=(\frac{h}{2}-\frac{t_f}{2})=(\frac{34.6(см)}{2}-\frac{0.9(см)}{2})=16.85(см)$$

$$S_x^{отс}=15.66(см^2)\times16.85(см)=263.871\times10^{-6}(м^3)$$

$$\tau_2=\frac{Q_{max}\times S_x^{отс}}{b(y)\times I_x}=\frac{45177(Н)\times263.871\times10^{-6}(м^3)}{0.174(м)\times11094\times10^{-8}(м^4)}=0.6(МПа)$$

Для 3 точки $y_3=(\frac{h}{2}-t_s)$:

$$\sigma_3=\frac{M_{max}}{I_x}\times(\frac{h}{2}-t_s)=\frac{74542.05(Н*м)}{11094\times10^{-8}(м^4)}\times(\frac{34.6(см)}{2}-0.9(см))=110.2(МПа)$$

$$y_c=(\frac{h}{2}-\frac{t_f}{2})=(\frac{34.6(см)}{2}-\frac{0.9(см)}{2})=16.85(см)$$

$$S_x^{отс}=15.66(см^2)\times16.85(см)=263.871\times10^{-6}(м^3)$$

$$\tau_3=\frac{Q_{max}\times S_x^{отс}}{b(y)\times I_x}=\frac{45177(Н)\times263.871\times10^{-6}(м^3)}{0.6\times10^{-2}(м)\times11094\times10^{-8}(м^4)}=17.9(МПа)$$

Для 4 точки $y_4=0$:

$$\sigma_4=\frac{M_{max}}{I_x}\times0=\frac{74542.05(Н*м)}{11094\times10^{-8}(м^4)}\times0=0(МПа)$$

Статический момент $S_x(y=0)$ равен статическому моменту полусечения ¿$358.09\times10^{-6}(м^3)$

$$\tau_4=\frac{Q_{max}\times S_x^{отс}}{b(y)\times I_x}=\frac{45177(Н)\times358.09\times10^{-6}(м^3)}{0.6\times10^{-2}(м)\times11094\times10^{-8}(м^4)}=24.3(МПа)$$

По третьей теории прочности:

$$\sigma^{экв}=\sqrt{\sigma^2+4\times\tau^2}\leq[\sigma]$$

$$\sigma_1^{экв}=\sqrt{\sigma_1^2+4\times\tau_1^2}=\sqrt{116.241^2+4\times0^2}=116.2(МПа)\leq245(МПа)$$

$$\sigma_2^{экв}=\sqrt{\sigma_2^2+4\times\tau_2^2}=\sqrt{110.194^2+4\times0.6^2}=110.2(МПа)\leq245(МПа)$$

$$\sigma_3^{экв}=\sqrt{\sigma_3^2+4\times\tau_3^2}=\sqrt{110.194^2+4\times17.9^2}=115.9(МПа)\leq245(МПа)$$

$$\sigma_4^{экв}=\sqrt{\sigma_4^2+4\times\tau_4^2}=\sqrt{0^2+4\times24.3^2}=48.6(МПа)\leq245(МПа)$$

Условия проверок выполняются. Сечение подобрано правильно. Окончательно из СТО АСЧМ 20-93 (Прокат стальной сортовой фасонного профиля. Двутавры горячекатаные с параллельными гранями полок. Технические условия) выбираем: Двутавр 35Б1

Размеры выбранного сечения:

Момент сопротивления относительно оси Ox: $W_x$ = 641.3 (см$^3$)

Высота сечения: h = 34.6 (см)

Ширина сечения: b = 17.4 (см)

Толщина стенки: $t_s$ = 0.6 (см)

Средняя толщина полки: $t_f$ = 0.9 (см)

Статический момент полусечения относительно оси Ox: $S_x$ = 358.09 (см$^3$)

Осевой момент инерции относительно оси Ox: $I_x$ = 11094 (см$^4$)

Из эпюры изгибающих моментов M определяем, что $M_{max}$ = 76.75 (кН × м). Выполним перевод единиц измерения максимального изгибающего момента в с систему СИ: $M_{max}$ = 76.75 (кН × м) = 76750.228 (Н × м).

Из эпюры поперечных сил Q определяем, что $Q_{max}$ = 46.515 (кН). Выполним перевод единиц измерения максимальной поперечной силы в с систему СИ: $Q_{max}$ = 46.515 (кН) = 46515.289 (Н).

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_x}\leq[\sigma]$$

где: $M_{max}$ - наибольший изгибающий момент;

$W_x$ - момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси Ox;

Заметим, что наибольшие нормальные напряжения в

поперечных сечениях балки возникают в наиболее удаленных точках от нейтральной оси Ox, которая проходит через центр тяжести сечения.

Из условия прочности по нормальным напряжениям вычислим значение минимального требуемого момента сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{76750.228(Н \times м)}{[245(МПа)]} = 313.266(см^3)$$

Дополнительно из условия жесткости (проверка прогиба) требуемый момент инерции:

$$I_x^{тр} \geq 7684.34(см^4)$$

Из сортамента выбираем ближайший больший номер сечения у которого:

$$W_x^{таб} \geq W_x$$

Из сборника СТО АСЧМ 20-93 (Прокат стальной сортовой фасонного профиля. Двутавры горячекатаные с параллельными гранями полок. Технические условия) выбираем: Двутавр 35Б1

Геометрические характеристики выбранного сечения:

Момент сопротивления относительно оси Ox: $W_x$ = 641.3 ($см^3$)

Высота сечения: h = 34.6 (см)

Ширина сечения: b = 17.4 (см)

Толщина стенки: $t_s$ = 0.6 (см)

Средняя толщина полки: $t_f$ = 0.9 (см)

Статический момент полусечения относительно оси Ox: $S_x$ = 358.09 ($см^3$)

Осевой момент инерции относительно оси Ox: $I_x$ = 11094 ($см^4$)

1) Проверим прочность выбранного сечения (Двутавр 35Б1) по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x^{таб}} = \frac{76750.228(Н \times м)}{641.3 \times 10^{-6}(м^3)} = 119.679(МПа) \leq 245(МПа)$$

2) Определим, удовлетворяет ли принятое сечение балки (Двутавр 35Б1) условию прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{max}=\frac{Q_{max}\times S_x^{omc}}{b\times I_x}\le[\tau]$$

где: $Q_{max}$ - наибольшая поперечная сила;

$S_x^{omc}$ - статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси Ох;

$b$ - ширина поперечного сечения балки на уровне рассматриваемой точки;

$I_x$ - момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси Ох;

$$\tau_{max}=\frac{Q_{max}\times S_x}{b(y)\times I_x}=\frac{46515.289(Н)\times 358.09\times 10^{-6}(м^3)}{0.6\times 10^{-2}(м)\times 11094\times 10^{-8}(м^4)}=25.024(МПа)\le 141(МПа)$$

3) По теории наибольших касательных напряжений (третья теория прочности) вычислим эквивалентные напряжения в рассматриваемых точках выбранного поперечного сечения, по формуле:

$$\sigma_i^{экв}=\sqrt{\sigma_i^2+4\times\tau_i^2}\le[\sigma]$$

$$\sigma_i=\frac{M_{max}}{I_x}\times y_i$$

где y - расстояние от центра тяжести сечения до выбранной точки;

Касательные напряжения в i-ой точке вычислим по формуле:

$$\tau_i=\frac{Q_{max}\times S_x^{omc}}{b(y)\times I_x}$$

где $S_x^{omc}=A^{omc}\times y_c$ - статический момент отсеченной части сечения выше выбранной точки, относительно оси X;

$y_c$ - координата центра тяжести отсеченной части сечения, относительно оси X;

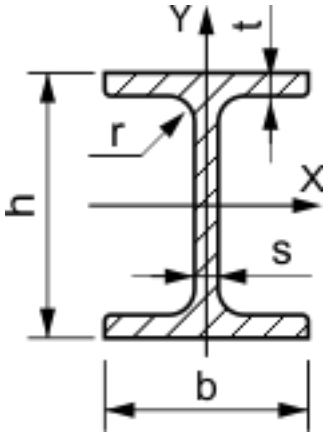
Выберем для проверки 4 точки в поперечном сечении:

1 точка - с координатой $y_1$ = h/2, статический момент $S_x$(y = h/2) = 0;

2 точка - с координатой $y_2$ = h/2 – t;

3 точка - с координатой $y_3$ = h/2 – t; Статический момент такой же как и для второй точки;

4 точка - в центре сечения, с координатой $y_4$ = 0;




Для 1 точки $y_1=\frac{h}{2}$:

$$\sigma_1=\frac{M_{max}}{I_x}\times\frac{h}{2}=\frac{76750.228(Н*м)}{11094\times10^{-8}(м^4)}\times\frac{34.6(см)}{2}=119.7(МПа)$$

Статический момент отсеченной части $S_x=0$ т.к. $A_{отс}=0$

$$\tau_1=\frac{Q_{max}\times S_x^{отс}}{b(y)\times I_x}=\frac{46515.289(Н)\times0(м^3)}{0.174(м)\times11094\times10^{-8}(м^4)}=0(МПа)$$

Для 2 точки $y_2=(\frac{h}{2}-t_f)$:

$$\sigma_2=\frac{M_{max}}{I_x}\times(\frac{h}{2}-t_f)=\frac{76750.228(Н*м)}{11094\times10^{-8}(м^4)}\times(\frac{34.6(см)}{2}-0.9(см))=113.5(МПа)$$

$$y_c=(\frac{h}{2}-\frac{t_f}{2})=(\frac{34.6(см)}{2}-\frac{0.9(см)}{2})=16.85(см)$$

$$S_x^{отс}=15.66(см^2)\times16.85(см)=263.871\times10^{-6}(м^3)$$

$$\tau_2=\frac{Q_{max}\times S_x^{отс}}{b(y)\times I_x}=\frac{46515.289(Н)\times263.871\times10^{-6}(м^3)}{0.174(м)\times11094\times10^{-8}(м^4)}=0.6(МПа)$$

Для 3 точки $y_3=(\frac{h}{2}-t_s)$:

$$\sigma_3=\frac{M_{max}}{I_x}\times(\frac{h}{2}-t_s)=\frac{76750.228(Н*м)}{11094\times10^{-8}(м^4)}\times(\frac{34.6(см)}{2}-0.9(см))=113.5(МПа)$$

$$y_c=(\frac{h}{2}-\frac{t_f}{2})=(\frac{34.6(см)}{2}-\frac{0.9(см)}{2})=16.85(см)$$

$$S_x^{отс}=15.66(см^2)\times16.85(см)=263.871\times10^{-6}(м^3)$$

$$\tau_3=\frac{Q_{max}\times S_x^{отс}}{b(y)\times I_x}=\frac{46515.289(Н)\times263.871\times10^{-6}(м^3)}{0.6\times10^{-2}(м)\times11094\times10^{-8}(м^4)}=18.4(МПа)$$

Для 4 точки $y_4=0$:

$$\sigma_4=\frac{M_{max}}{I_x}\times0=\frac{76750.228(Н*м)}{11094\times10^{-8}(м^4)}\times0=0(МПа)$$

Статический момент $S_x(y=0)$ равен статическому моменту полусечения ¿$358.09\times10^{-6}(м^3)$

$$\tau_4=\frac{Q_{max}\times S_x^{отс}}{b(y)\times I_x}=\frac{46515.289(Н)\times358.09\times10^{-6}(м^3)}{0.6\times10^{-2}(м)\times11094\times10^{-8}(м^4)}=25(МПа)$$

По третьей теории прочности:

$$\sigma^{экв}=\sqrt{\sigma^2+4\times\tau^2}\leq[\sigma]$$

$$\sigma_1^{экв}=\sqrt{\sigma_1^2+4\times\tau_1^2}=\sqrt{119.684^2+4\times0^2}=119.7(МПа)\leq245(МПа)$$

$$\sigma_2^{экв}=\sqrt{\sigma_2^2+4\times\tau_2^2}=\sqrt{113.458^2+4\times0.6^2}=113.5(МПа)\leq245(МПа)$$

$$\sigma_3^{экв}=\sqrt{\sigma_3^2+4\times\tau_3^2}=\sqrt{113.458^2+4\times18.4^2}=119.3(МПа)\leq245(МПа)$$

$$\sigma_4^{экв}=\sqrt{\sigma_4^2+4\times\tau_4^2}=\sqrt{0^2+4\times25^2}=50(МПа)\leq245(МПа)$$

Условия проверок выполняются. Сечение подобрано правильно. Окончательно из СТО АСЧМ 20-93 (Прокат стальной сортовой фасонного профиля. Двутавры горячекатаные с параллельными гранями полок. Технические условия) выбираем: Двутавр 35Б1

Размеры выбранного сечения:

Момент сопротивления относительно оси Ox: $W_x$ = 641.3 (см$^3$)

Высота сечения: h = 34.6 (см)

Ширина сечения: b = 17.4 (см)

Толщина стенки: $t_s$ = 0.6 (см)

Средняя толщина полки: $t_f$ = 0.9 (см)

Статический момент полусечения относительно оси Ox: $S_x$ = 358.09 (см$^3$)

Осевой момент инерции относительно оси Ox: $I_x$ = 11094 (см$^4$)

1) Согласно схеме решения задач статики определяем, что для нахождения неизвестных реакций необходимо рассмотреть равновесие балки.

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix}=0\,,\sum_{i=1}^{n} M_A(P_i)=0\,,\sum_{i=1}^{n} M_B(P_i)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix}=0:H_B=0$$

Найдем сумму моментов относительно шарнирно-подвижной опоры в точке A:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(P_i)=0:-q_1\times 6.6\times(6.6/2)+R_B\times 6.6-q_2\times 6.6\times(6.6/2)=0$$

Найдем сумму моментов относительно шарнирно-неподвижной опоры в точке B:

$$\sum_{i=1}^{n} M_B(P_i)=0:-q_1\times 6.6\times(6.6/2)+R_B\times 6.6-q_2\times 6.6\times(6.6/2)=0$$

2) Вычислим реакцию шарнирно-неподвижной опоры в точке B:

$$R_B=(q_1\times 6.6\times(6.6/2)+q_2\times 6.6\times(6.6/2))/6.6=(13.69\times 6.6\times(6.6/2)+0.41\times 6.6\times(6.6/2))/6$$

Так как реакция отрицательна, на расчетной схеме направим ее в противоположную сторону.

3) Вычислим реакцию шарнирно-подвижной опоры в точке A:

$R_A=(q_1\times 6.6\times(6.6-6.6/2)+q_2\times 6.6\times(6.6-6.6/2))/6.6=(13.69\times 6.6\times(6.6-6.6/2)+0.41\times$

Так как реакция отрицательна, на расчетной схеме направим ее в противоположную сторону.

4) Решаем полученную систему уравнений, находим неизвестные:

$$H_B=0(кН)$$

5) Выполним проверку решения, подставляя найденные значения в уравнение равновесия относительно оси Oy:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy}=0: R_A-q_1\times 6.6+R_B-q_2\times 6.6=46.52\times 1-13.69\times 6.6+46.52\times 1-0.41\times 6.6=0$$

# Построение эпюр

**1) Рассмотрим первый участок 0 ≤ x₁ < 6.6**

Продольная сила N:

$$N(x_1)=0$$

Значения N на краях участка:

$$N_1(0)=0(кН)$$

$$N_1(6.60)=0(кН)$$

Поперечная сила Q:

$$Q(x_1)=R_A-q_1\times(x_1-0)-q_2\times(x_1-0)$$

Значения Q на краях участка:

$$Q_1(0)=46.52-13.69\times(0-0)-0.41\times(0-0)=46.52(кН)$$

$$Q_1(6.60)=46.52-13.69\times(6.6-0)-0.41\times(6.6-0)=-46.52(кН)$$

На этом участке эпюра Q пересекает горизонтальную ось. Точка пересечения: x = 3.30.

Изгибающий момент M:

$$M(x_1)=R_A\times(x_1)-q_1\times ¿$$

Значения M на краях участка:

$$M_1(0)=46.52\times(0)-13.69\times¿$$

$$M_1(6.60)=46.52\times(6.60)-13.69\times¿$$

Локальный экстремум в точке x = 3.30:

$$M_1(3.30)=46.52\times(3.30)-13.69\times¿$$

## Определение прогибов и углов поворота

1) Метод начальных параметров (МНП). Жесткость балки EI = 22853.64 кН·м².

Дифференциальное уравнение упругой линии:

$$EI\times y''(x)=-M(x)$$

Дважды интегрируя, получаем универсальное уравнение:

$$EI\times y(x)=EI\times y_0+EI\times\theta_0\times x-\int\int M(x)dx^2$$

2) Граничные условия и определение начальных параметров:

Прогиб над левой опорой A равен нулю, откуда EIw₀ = 0.

Начальный угол поворота θ₀ определим из условия нулевого прогиба над опорой B:

$$EI\times w(x_B)=EI\,w_0+EI\,\theta_0\times 6.6+R_A\times z^3/6-q_1\times¿$$

$$\Rightarrow EI\,\theta_0=-168.85(кН\cdot м^2),EI\,w_0=0(кН\cdot м^3)$$

3) Построение эпюр углов поворота и прогибов по участкам:

**Участок I (0 ≤ z ≤ 6.6):**

Угол поворота сечения θ:

$$EI\,\theta^I(z)=\theta_0+R_A\times z^2/2-q_1\times¿$$

Значения EIθ на краях отрезка:

$$EI\,\theta^I(0)=-2.35\times 0^3+23.26\times 0^2-168.85=-168.85(кН\cdot м^2)$$

$$EI\,\theta^I(6.6)=-2.35\times 6.6^3+23.26\times 6.6^2-168.85=168.85(кН\cdot м^2)$$

Прогиб w:

$$EI\,w^I(z)=\theta_0\times z+R_A\times z^3/6-q_1\times ¿$$

Значения EIw на краях отрезка:

$$EI\,w^I(0)=-0.59\times 0^4+7.75\times 0^3-168.85\times 0=0(кН\cdot м^3)$$

$$EI\,w^I(6.6)=-0.59\times 6.6^4+7.75\times 6.6^3-168.85\times 6.6=0(кН\cdot м^3)$$

Локальный экстремум в точке z = 3.3:

$$EI\,w^I(3.3)=-0.59\times 3.3^4+7.75\times 3.3^3-168.85\times 3.3=-348.25(кН\cdot м^3)$$

4) Максимальный прогиб и угол поворота:

$$EI\,w_{max}=EI\cdot w=EIw(3.30)=-0.59\times 3.3^4+7.75\times 3.3^3-168.85\times 3.3$$

$$w_{max}=\frac{EI\,w_{max}}{EI}=\frac{-348.2542}{22853.64}=-0.0152\text{ (м)}$$

w_max = -15.2385 мм

$$EI\,\theta_{max}=EI\cdot\theta=EI\theta(0)=-2.35\times 0^3+23.26\times 0^2-168.85$$

$$\theta_{max}=\frac{EI\,\theta_{max}}{EI}=\frac{-168.8505}{22853.64}=-0.0074\text{ (рад)}$$

5) Проверка граничных условий:

Опора A:

$$EI\,w^I(0)=-0.59\times 0^4+7.75\times 0^3-168.85\times 0=0(кН\cdot м^3)$$

✓

Опора B:

$$EI\,w^I(6.60)=-0.59\times 6.6^4+7.75\times 6.6^3-168.85\times 6.6=0(кН\cdot м^3)$$

✓

6) Численная проверка (метод трапеций, N=400):

Для независимого контроля точности эпюры прогибов y(x) и углов поворота θ(x), построенные методом начальных параметров (аналитически), сверяются с результатами численного расчета — двойного интегрирования эпюры изгибающих моментов M(x) методом трапеций.

Δ — абсолютная погрешность численного метода: Δ = | аналитическое − численное| значение.

| **z, м** | **EIw аналит.** | **EIw числ.** | **Δ** | **EIθ аналит.** | **EIθ числ.** | **Δ** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | -168.8505 | -168.8489 | 0.0016 |
| 3.30 | -348.2542 | -348.2499 | 0.0043 | 0 | 0 | 0 |
| 6.60 | 0 | 0 | 0 | 168.8505 | 168.8489 | 0.0016 |

Максимальные отклонения: ΔEIw_max = 0.0043 ΔEIθ_max = 0.0016

Относительная погрешность: δw = 0.0012 % δθ = 0.0010 %

Вывод: результаты аналитического и численного методов согласуются (δ ≤ 5%) — эпюры построены корректно.

## Проверка прогиба

Проверка прогиба:

Норматив: СП 16.13330.2017 — Балки перекрытий (общий случай) (Полная (D+L)), СП 20.13330.2017, табл. Д.1.

Расчетный пролет: L = 6,6 м.

Предельный прогиб: [f] = L/300 = 22,0 мм.

Фактический прогиб: f = 15,2 мм.

Условие: f ≤ [f] — Выполнено (использование 69%).

## Подбор сечения

Из эпюры изгибающих моментов M определяем, что $M_{max}$ = 76.75 (кН × м). Выполним перевод единиц измерения максимального изгибающего момента в с систему СИ: $M_{max}$ = 76.75 (кН × м) = 76750 (Н × м).

Из эпюры поперечных сил Q определяем, что $Q_{max}$ = 46.52 (кН). Выполним перевод единиц измерения максимальной поперечной силы в с систему СИ: $Q_{max}$ = 46.52 (кН) = 46520 (Н).

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

где: $M_{max}$ - наибольший изгибающий момент;

$W_x$ - момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси Ox;

Заметим, что наибольшие нормальные напряжения в поперечных сечениях балки возникают в наиболее удаленных точках от нейтральной оси Ox, которая проходит через центр тяжести сечения.

Из условия прочности по нормальным напряжениям вычислим значение минимального требуемого момента сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{76750(Н \times м)}{[245(МПа)]} = 313.265(см^3)$$

Дополнительно из условия жесткости (проверка прогиба) требуемый момент инерции:

$$I_x^{mp} \geq 7684.34(см^4)$$

Из сортамента выбираем ближайший больший номер сечения у которого:

$$W_x^{таб} \geq W_x$$

Из сборника СТО АСЧМ 20-93 (Прокат стальной сортовой фасонного профиля. Двутавры горячекатаные с параллельными гранями полок. Технические условия) выбираем: Двутавр 35Б1

Геометрические характеристики выбранного сечения:

Момент сопротивления относительно оси Ox: $W_x$ = 641.3 ($см^3$)

Высота сечения: h = 34.6 (см)

Ширина сечения: b = 17.4 (см)

Толщина стенки: $t_s$ = 0.6 (см)

Средняя толщина полки: $t_f$ = 0.9 (см)

Статический момент полусечения относительно оси Ox: $S_x$ = 358.09 ($см^3$)

Осевой момент инерции относительно оси Ox: $I_x$ = 11094 (см$^4$)

1) Проверим прочность выбранного сечения (Двутавр 35Б1) по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_x^{таб}}=\frac{76750(Н\times м)}{641.3\times10^{-6}(м^3)}=119.679(МПа)\le245(МПа)$$

2) Определим, удовлетворяет ли принятое сечение балки (Двутавр 35Б1) условию прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{max}=\frac{Q_{max}\times S_x^{отс}}{b\times I_x}\le[\tau]$$

где: $Q_{max}$ - наибольшая поперечная сила;

$S_x^{отс}$ - статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси Ox;

$b$ - ширина поперечного сечения балки на уровне рассматриваемой точки;

$I_x$ - момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси Ox;

$$\tau_{max}=\frac{Q_{max}\times S_x}{b(y)\times I_x}=\frac{46520(Н)\times358.09\times10^{-6}(м^3)}{0.6\times10^{-2}(м)\times11094\times10^{-8}(м^4)}=25.026(МПа)\le141(МПа)$$

3) По теории наибольших касательных напряжений (третья теория прочности) вычислим эквивалентные напряжения в рассматриваемых точках выбранного поперечного сечения, по формуле:

$$\sigma_i^{экв}=\sqrt{\sigma_i^2+4\times\tau_i^2}\le[\sigma]$$

$$\sigma_i=\frac{M_{max}}{I_x}\times y_i$$

где y - расстояние от центра тяжести сечения до выбранной точки;

Касательные напряжения в i-ой точке вычислим по формуле:

$$\tau_i = \frac{Q_{max} \times S_x^{omc}}{b(y) \times I_x}$$

где $S_x^{omc} = A^{omc} \times y_c$ - статический момент отсеченной части сечения выше выбранной точки, относительно оси X;

$y_c$ - координата центра тяжести отсеченной части сечения, относительно оси X;

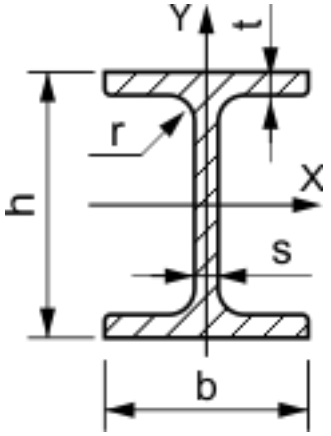
Выберем для проверки 4 точки в поперечном сечении:

1 точка - с координатой $y_1 = h/2$, статический момент $S_x(y = h/2) = 0$;

2 точка - с координатой $y_2 = h/2 - t$;

3 точка - с координатой $y_3 = h/2 - t$; Статический момент такой же как и для второй точки;

4 точка - в центре сечения, с координатой $y_4 = 0$;




Для 1 точки $y_1 = \frac{h}{2}$:

$$\sigma_1 = \frac{M_{max}}{I_x} \times \frac{h}{2} = \frac{76750(Н*м)}{11094 \times 10^{-8}(м^4)} \times \frac{34.6(см)}{2} = 119.7(МПа)$$

Статический момент отсеченной части $S_x = 0$ т.к. $A_{отс} = 0$

$$\tau_1 = \frac{Q_{max} \times S_x^{omc}}{b(y) \times I_x} = \frac{46520(Н) \times 0(м^3)}{0.174(м) \times 11094 \times 10^{-8}(м^4)} = 0(МПа)$$

Для 2 точки $y_2 = (\frac{h}{2} - t_f)$:

$$\sigma_2=\frac{M_{max}}{I_x}\times(\frac{h}{2}-t_f)=\frac{76750(Н*м)}{11094\times10^{-8}(м^4)}\times(\frac{34.6(см)}{2}-0.9(см))=113.5(МПа)$$

$$y_c=(\frac{h}{2}-\frac{t_f}{2})=(\frac{34.6(см)}{2}-\frac{0.9(см)}{2})=16.85(см)$$

$$S_x^{отс}=15.66(см^2)\times16.85(см)=263.871\times10^{-6}(м^3)$$

$$\tau_2=\frac{Q_{max}\times S_x^{отс}}{b(y)\times I_x}=\frac{46520(Н)\times263.871\times10^{-6}(м^3)}{0.174(м)\times11094\times10^{-8}(м^4)}=0.6(МПа)$$

Для 3 точки $y_3=(\frac{h}{2}-t_s)$:

$$\sigma_3=\frac{M_{max}}{I_x}\times(\frac{h}{2}-t_s)=\frac{76750(Н*м)}{11094\times10^{-8}(м^4)}\times(\frac{34.6(см)}{2}-0.9(см))=113.5(МПа)$$

$$y_c=(\frac{h}{2}-\frac{t_f}{2})=(\frac{34.6(см)}{2}-\frac{0.9(см)}{2})=16.85(см)$$

$$S_x^{отс}=15.66(см^2)\times16.85(см)=263.871\times10^{-6}(м^3)$$

$$\tau_3=\frac{Q_{max}\times S_x^{отс}}{b(y)\times I_x}=\frac{46520(Н)\times263.871\times10^{-6}(м^3)}{0.6\times10^{-2}(м)\times11094\times10^{-8}(м^4)}=18.4(МПа)$$

Для 4 точки $y_4=0$:

$$\sigma_4=\frac{M_{max}}{I_x}\times0=\frac{76750(Н*м)}{11094\times10^{-8}(м^4)}\times0=0(МПа)$$

Статический момент $S_x(y=0)$ равен статическому моменту полусечения ¿$358.09\times10^{-6}(м^3)$

$$\tau_4=\frac{Q_{max}\times S_x^{отс}}{b(y)\times I_x}=\frac{46520(Н)\times358.09\times10^{-6}(м^3)}{0.6\times10^{-2}(м)\times11094\times10^{-8}(м^4)}=25(МПа)$$

По третьей теории прочности:

$$\sigma^{экв}=\sqrt{\sigma^2+4\times\tau^2}\leq[\sigma]$$

$$\sigma_1^{экв}=\sqrt{\sigma_1^2+4\times\tau_1^2}=\sqrt{119.684^2+4\times0^2}=119.7(МПа)\leq245(МПа)$$

$$\sigma_2^{экв}=\sqrt{\sigma_2^2+4\times\tau_2^2}=\sqrt{113.458^2+4\times0.6^2}=113.5(МПа)\leq245(МПа)$$

$$\sigma_3^{экв}=\sqrt{\sigma_3^2+4\times\tau_3^2}=\sqrt{113.458^2+4\times18.4^2}=119.3(МПа)\leq245(МПа)$$

$$\sigma_4^{экв}=\sqrt{\sigma_4^2+4\times\tau_4^2}=\sqrt{0^2+4\times25^2}=50.1(МПа)\leq245(МПа)$$

Условия проверок выполняются. Сечение подобрано правильно. Окончательно из СТО АСЧМ 20-93 (Прокат стальной сортовой фасонного профиля. Двутавры горячекатаные с параллельными гранями полок. Технические условия) выбираем: Двутавр 35Б1

Размеры выбранного сечения:

Момент сопротивления относительно оси Ox: $W_x$ = 641.3 (см$^3$)

Высота сечения: h = 34.6 (см)

Ширина сечения: b = 17.4 (см)

Толщина стенки: $t_s$ = 0.6 (см)

Средняя толщина полки: $t_f$ = 0.9 (см)

Статический момент полусечения относительно оси Ox: $S_x$ = 358.09 (см$^3$)

Осевой момент инерции относительно оси Ox: $I_x$ = 11094 (см$^4$)